

## Геометрические образы в алгебраических задачах

Таблица

№ п/п	Уравнение, неравенство или система	Геометрический образ (коррелят вида)
1.	$ax + by = c, a^2 + b^2 \neq 0$	Прямая, расположение которой определяется конкретными значениями параметров $a, b, c$
1.1	$ax = c, a \neq 0$	Прямая, параллельная оси ординат
1.2	$by = c, b \neq 0$	Прямая, параллельная оси абсцисс
1.3	$y = kx + p, k \neq 0$	Прямая, пересекающая ось ординат в точке $M(0; p)$ , ось абсцисс в точке $N\left(-\frac{p}{k}; 0\right)$ , образующая с положительным лучом оси абсцисс угол $0 < \varphi < \pi, \operatorname{tg} \varphi = k$
	$y - y_0 = k(x - x_0)$	Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ и имеющей угловой коэффициент $k = -\frac{b}{a}$
1.4	$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}, t \in R$	Параметрическое задание прямой, задаваемой декартовым уравнением $ax + by = c, a^2 + b^2 \neq 0$ , проходящей через точку $M(x_0; y_0)$
	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in R$	Параметрическое уравнение прямой, перпендикулярной прямой, задаваемой декартовым уравнением $ax + by = c, a^2 + b^2 \neq 0$ , проходящей через точку $M(x_0; y_0)$
	$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$	Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ и перпендикулярной прямой, заданной уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$
1.5	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	Уравнение прямой, проходящей через точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ .
2.	$ax + by > c (< c, \leq c, \geq c)$	Полуплоскость, границей которой является прямая заданная уравнением $ax + by = c, a^2 + b^2 \neq 0$
3.	$y = k x - a , k \neq 0$	«Двухзвенная ломаная», вершина которой расположена в точке $M(a; 0)$ , лучи которой симметричны относительно прямой $x = a$
3.1	$y = k_1 x - a_1  + k_2 x - a_2  + \dots + k_n x - a_n $	«Многозвенная ломаная», вершины которой расположены в точках, абсциссы которых есть точки перемены знака каждого «подмодульного» выражения
4.	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$ $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} =  R $	Точка $M(a; b)$ , если $R = 0$ . Окружность с центром в точке $M(a; b)$ , радиуса $ R , R \neq 0$

4.1	$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2,$ $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq  R , R \neq 0$	Круг с центром в точке $M(a;b)$ , радиуса $ R , R \neq 0$
4.2	$(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2,$ $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} >  R , R \neq 0$	Часть плоскости, лежащая вне круга с центром в точке $M(a;b)$ , радиуса $ R , R \neq 0$
4.3	$y = b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$	Верхняя полуокружность с центром в точке $M(a;b)$ , радиуса $ R , R \neq 0$
4.4	$y = b - \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$	Нижняя полуокружность с центром в точке $M(a;b)$ , радиуса $ R , R \neq 0$
5.	$ x-a  +  y-b  = c, c > 0$	Контур квадрата с центром в точке $M(a;b)$ , диагоналями, параллельными осям координат
5.1	$ x-a  +  y-b  \leq c, c > 0$	Квадрат с центром в точке $M(a;b)$ , диагоналями, параллельными осям координат
5.2	$ a_1x + b_1y + c_1  +  a_2x + b_2y + c_2  = d,$ $d > 0, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$	Контур параллелограмм, диагонали которого лежат на прямых, задаваемых подмодульными выражениями, центр которого – точка пересечения этих прямых
5.3	$ a_1x + b_1y + c_1  +  a_2x + b_2y + c_2  \leq d,$ $d > 0, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$	Четырёхугольник, диагонали которого лежат на прямых, задаваемых подмодульными выражениями.
5.4.	$ a_1x + b_1y + c_1  + \dots +  a_nx + b_ny + c_n  \leq d,$ $d > 0,$	Многоугольник, диагонали которого лежат на прямых, задаваемых подмодульными выражениями.
6.	$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	Парабола с вершиной в точке $M\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ с ветвями, направленными вверх, если $a > 0$ или вниз, если $a < 0$
6.1	$y > ax^2 + bx + c, y < ax^2 + bx + c, a \neq 0$	Части координатной плоскости, границей которых служит парабола
7.	$y = \frac{k}{x}, k \neq 0$	Гипербола с вертикальной асимптотой $x = 0$ , ветви которой расположены в 1 и 3 координатных четвертях, если $k > 0$ , или во 2 и 4 четвертях, если $k < 0$ .
7.1	$xy = k, k \neq 0$	Гипербола, ветви которой расположены в 1 и 3 координатных четвертях, если $k > 0$ , или во 2 и 4 четвертях, если $k < 0$ .
	$y = \frac{ax+b}{cx+d},$ $ad - bc \neq 0$	Гипербола с вертикальной асимптотой $cx + d = 0$ и горизонтальной асимптотой $y = \frac{a}{c}$ , ветви которой расположены в 1 и 3 или 2 и 4 четвертях относительно асимптот
<b>Задание фрагментов прямой</b>		
8.1	$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} =$ $= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$	Отрезок прямой $NM$ с концами в точках $N(a;b)$ и $M(c;d)$

8.2	$\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \mp \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2} =$ $= \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$	Лучи прямой $NM$ , выходящие из точек $M$ и $N$ , не содержащие отрезок $NM$ .
<b>Отдельные выражения</b>		
9.1.	$\frac{ ax_0+by_0+c }{\sqrt{a^2+b^2}}$	Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax+by+c=0$ , $a^2+b^2 \neq 0$
9.2.	$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$	Величина, задающая расстояние от некоторой точки $M(x; y)$ до точки $N(a; b)$
9.3	$\frac{ a_1a_2+b_1b_2 }{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} =  \cos \varphi $	Косинус не тупого угла, образованного прямыми $a_1x+b_1y=c_1$ , $a_2x+b_2y=c_2$
9.4	$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$ $a > b^2$	Формула двойного радикала
	$\min(a; b) = \frac{a+b- a-b }{2}$ $\max(a; b) = \frac{a+b+ a-b }{2}$	Минимум и максимум двух чисел

## Задания по теме «Геометрические образы в условии задач»

### Простейшие кривые

1. Построить ГМТ, заданные уравнениями, неравенствами или их системами

$$y = 2x, \quad y \geq 2x$$

$$y = -2x + 1, \quad y < -2x + 1 \quad 2x - 3y = 5, \quad 2x - 3y \geq 5$$

$$1. \begin{cases} y < x - 1 \\ y > 2x - 3 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2y - 3x > 4 \\ 2x - y > 8 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x - y > 1 \\ y - x > 1 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} y - x - 2 > 0 \\ y - 2x + 3 < 0 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 3x + 5y > 7 \\ 4x + 5y < 9 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y < x + 1 \\ y < -x + 9 \\ y > \frac{1}{3}x - 1 \end{cases} \quad 7. \begin{cases} y < x + 3 \\ y + x < 3 \\ y > 1 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} y < x + 1 \\ y < 1 - x \\ y > -1 - x \\ y > x - 1 \end{cases} \quad 9. \begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ 4x + y \geq 1 \\ 4x - y \geq 1 \\ y \leq 3 \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x + 3y \leq 1 \\ x + 3y \geq -2 \\ 3x + 2y \leq 1 \\ 3x + 4y \geq -1 \end{cases}$$

**Задача.** Экономический факультет МГУ.

Число рабочих двух бригад более 27 человек. Число членов первой бригады более чем в 2 раза превышает число рабочих второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превосходит число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде? Ответ: 11 и 17

$$1. \begin{cases} y > x^2 \\ y < x \end{cases} \quad 2. \begin{cases} y > x^2 \\ 3y - x < 9 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} y > x^2 - 1 \\ y < 1 - x^2 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} y > x^2 - 5x + 6 \\ y < 4 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} y < \frac{1}{x} \\ y < x \\ y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$6. xy > 1 \quad 7. \begin{cases} x > y^2 \\ x < 2 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x < y^2 \\ -x < y^2 \\ y < 4 \end{cases}$$

**Задачи.**

1. Пусть  $M$  – множество точек плоскости с координатами  $(x; y)$  таких, что числа  $x, y, 6 - 2x$  – являются сторонами некоторого треугольника. Найдите его площадь.

2. Пусть  $M$  – множество точек плоскости с координатами  $(x; y)$  таких, что числа  $3x, 2y, 9 - y$  – являются сторонами некоторого треугольника. Найдите его площадь.

3. Вероятностная формулировка: Из квадрата, заданного системой  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$  выбирается

произвольная точка  $M(x; y)$ . Какова вероятность того, что числа  $x, y, 6 - 2x$  могут служить сторонами некоторого треугольника?

4. Два человека договорились встретиться между 17 и 18 часами с условием, что тот, кто придет первым, ждет второго не более 15 минут. Какова вероятность их встречи

1. Найдите целочисленные решения систем неравенств

$$\begin{array}{l}
1. \begin{cases} x+y < 2,5 \\ x-y > -3 \\ y-1 > 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x+y < 3 \\ x-y > -2,5 \\ y-1 > 0 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 7x+y < 7 \\ 7x-y+7 > 0 \\ y > 5 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 9x+y-9 < 0 \\ 9x-y+9 > 0 \\ y-7 > 0 \end{cases} \\
5. \begin{cases} x^2+y^2 < 3 \\ y-x-1 > 0 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x^2+y^2-6x-10y+30 < 0 \\ x+y > 8 \end{cases} \\
7. \begin{cases} 2x^2+2y^2-12x+20y+65 < 0 \\ 4x+2y > 3 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167 < 0 \\ 2x+4y < 15 \end{cases} \\
9. \begin{cases} x^2-8x+15+y < 0 \\ x-4y < 5 \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x^2-6x+10-y < 0 \\ y < x \end{cases} \\
11. \begin{cases} x^2-4x+5-y < 0 \\ x^2-2x-3+y < 0 \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 9x^2+36x+32+y \leq 0 \\ x^2+2x+3-y < 0 \end{cases} \\
13. \begin{cases} y > \frac{1}{x} \\ y > 0 \\ x+y < 3 \end{cases} \quad 14. \begin{cases} y > \frac{2x+1}{x} \\ x+y < 8 \\ x > 2 \end{cases}
\end{array}$$

Постройте ГМТ, заданные системой неравенств.

$$\begin{array}{l}
1. \begin{cases} \frac{x+y-3}{6-x-y} \geq 0 \\ 6(x+y)-x^2-y^2 \geq 9 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{2-x-y}{x+y-4} \leq 0 \\ 4(x+y)-x^2-y^2 \geq 4 \end{cases} \\
3. \begin{cases} 2xy^2+4x^2 \leq y^2+8x^3 \\ x^2+y^2 \leq 4x+5 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x^2y+y^2 \leq y^3+x^2 \\ y^2+y \geq (3-x)(3+x)-\frac{1}{4} \end{cases}
\end{array}$$

### Задачи на исследование расположения простейших кривых

1. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство  $\frac{x+2a-7}{x+a} > 0$  верно для всех  $x \in [2; 5]$  Ответ:  $(-\infty; -5) \cup (2,5; +\infty)$

2. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство  $\frac{x-3a-5}{x-a} \leq 0$  верно для всех  $x \in [1; 4]$  Ответ:  $\left[-\frac{1}{3}; 1\right)$

3. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство  $\frac{x-2a}{x-a+3} < 0$  верно для любого  $x \in [1; 3]$  Ответ:  $(1; 4)$

4. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система  $\begin{cases} x^2+y^2=4a^2 \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a^2 \end{cases}$  имеет единственное решение. Ответ:  $\left\{-5; -\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; 5\right\}$

4. При каких значениях параметра система неравенств  $\begin{cases} (x+y)(x-2y) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 4(x-1) + 4a^2 \end{cases}$  имеет хотя бы одно решение? Ответ:  $|a| \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$

5. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система  $\begin{cases} y \geq x^2 + 2a \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$  имеет единственное решение. Ответ:  $\frac{1}{8}$

6. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система  $a) \begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0 \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq a \\ x^2 - 2x - 3 \leq -6a \end{cases}$  имеет единственное решение.

Ответ:  $a) \{0; 1\} \quad b) \{0; -1\}$

7. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система  $\begin{cases} \frac{x-y}{x+3y} \geq 0 \\ y(y-2) + x^2 \leq (a-1)(a+1) \end{cases}$  не имеет решения. Ответ:  $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Найдите все значения параметров, при которых система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y \\ x^2 + (12-2a)x + y^2 = 2ay + 12a - a^2 - 27 \end{cases}$  имеет решения  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ , удовлетворяющие условию  $\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$ .

Ответ:  $a = 4; b \in (-5 - 3\sqrt{5}; 5 - 3\sqrt{5}) \cup (3\sqrt{5} - 5; 3\sqrt{5} + 5)$

9. Найдите все значения параметров, при которых система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2p^2 = (10-2p)y + 10p - 21 \\ x^2 + y^2 + 52 = q^2 - 8x - 12y \end{cases}$  имеет решения  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ , удовлетворяющие условию  $\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$ .

Ответ:  $p = 2; |q| \in (3\sqrt{13} - 2; 3\sqrt{13} + 2)$

## Ломаная

1. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение  $3|x-1|+2=ax$  имеет ровно 2 решения

2. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение  $2|x+3|-3|x+4|+3|x+5|=ax$  имеет ровно 2 различных решения

3. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство  $|x-a|+|2x-4|\geq 6$  верно для любого значения переменной  $x$ .

4. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение  $a^2\left|a+\frac{x}{a^2}\right|+|x+1|=1-a^3$  имеет не менее 4 различных решений.

5. Найдите все значения параметра  $p$ , при каждом из которых уравнение  $|x-p^2|+|x-2p|=6-p$  имеет бесконечно много решений.

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $5x+7|x-a|+3|x+3|+6|x-3|>145$  верно для любого значения  $x$ .

7. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение  $3x+|2x+|x-a||=7|x+2|$

$$2x-|x-|x-a||=5|x-3|$$

$$5|x-1|+|4x+|3x-|x-a||=15|x-2|$$

имеет хотя бы одно решение

7. Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнения имеют три различных корня

$$x-a=2|2|x|-a^2| \quad x-\frac{a}{2}=4|4|x|-a^2|$$

$$x-\frac{a}{3}=9|9|x|-a^2| \quad x-\frac{a}{2}=2|2|x|-a^2|$$

## Ломаная в уравнениях и неравенствах

Решите уравнения, используя формулу двойного радикала и тождество  $\sqrt{f^2(x)}=|f(x)|$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$$

$$1. \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$$

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=5$$

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$$

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых корни уравнения  $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$  существуют и принадлежат отрезку  $[2; 17]$

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых корни уравнения  $\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=a$  существуют и принадлежат отрезку  $[2; 27]$

## Контурные фигур

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=2 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases} \text{ имеет 8 различных решений.}$$

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} 5|y| + |x-1| = 1 \\ 25y^2 + x^2 - 2x = a \end{cases}$$
 имеет ровно 4 решения

3. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} 2|x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
 имеет 8 различных решений.

### Площади фигур, заданных неравенствами

1. ДВИ МГУ 2012. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек  $(x; y)$  координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению

А)  $|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6$ .    Б)  $|2y - x| + 2|y + 4| + |x| = 8$

2. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством  $3|x - y| + |x + 3y| \leq 12$

3. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством  $|2x - 3y + 4| + |3x + y - 5| \leq 7$

4. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством  $|y - 1| + |y - x| \leq 4$

5. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством  $2|x - 1| + |y + 2x - 1| \leq 5$

6. Найдите уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой лежит фигура, заданная неравенством  $|2x + y - 2| + |3x + 6| \leq 6$

7. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых площадь фигуры, заданной неравенством  $|2x + y| + |x - y| \leq a$  равна 24.

8. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством 
$$\frac{2|x| + |y| - 2}{x^2 + y^2 - \frac{4}{5}} \leq 0$$

9. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств 
$$\begin{cases} \log_{x+y}(2xy + 2x) \geq 2 \\ |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$$

10. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leq 2x + 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

11. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых периметр фигуры, заданной неравенством  $\log_{\frac{2-|ay|}{3}}\left(\frac{x^2 + a^2}{2a^2}\right) > 0$  будет наименьшим.

12. ДВИ МГУ 2011. Решите систему неравенств:

А) 
$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 12y^2 \leq 1 \\ 5x + 6y \leq -3 \end{cases}$$
    Б) 
$$\begin{cases} 4x^2 - 2xy + 7y^2 \leq 1 \\ 2x - 5y \geq 2 \end{cases}$$

В) 
$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leq 1 \\ 4x + 7y \geq 3 \end{cases}$$
    Г) 
$$\begin{cases} 5x^2 - 2xy + 9y^2 \leq 1 \\ 3x - 5y \leq -2 \end{cases}$$



### Дуги окружности в условии

1. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $3 + \sqrt{-(x^2 + 4x + 3)} = a - x$  имеет единственное решение.
2. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2 + \sqrt{-(x^2 - 4x + 3)} = a + \sqrt{1 - a^2 + 2ax - x^2}$  имеет единственное решение.
3. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $1 - \sqrt{-(x^2 + 6x + 8)} = a + x$  имеет единственное решение.
4. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{4x - 3 - x^2} = ax - 1$  имеет единственное решение.
5. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a + \sqrt{6x - x^2} - 8 = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$  имеет единственное решение.
6. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система неравенств 
$$\begin{cases} x \leq \sqrt{2x - y^2} + 2 \\ y \geq 4 - ax \end{cases}$$
 имеет решение
7. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система неравенств 
$$\begin{cases} y \leq \sqrt{2 + 2y - x^2} \\ 6 + ay \geq x \end{cases}$$
 имеет решение

### Расстояния в условии

1. Найдите минимум выражения  $f(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$ .
2. Найдите наименьшее значение функции  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$
3. Найдите наименьшее значение функции  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 10x + 13}$ .
4. (ВМК МГУ). Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29} \\ (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16 \end{cases}$$
5. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y+3a)^2} = |a|\sqrt{10} \\ y = ax + a^2 - 9 \end{cases}$$
 имеет бесконечно много решений.
6. Найдите значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0 \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.
7. Найдите наименьшее значение выражения  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$ , если  $x + 2y = 2$
8. Найдите все пары чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0$ , при которых значение выражения  $\left| \sqrt{x^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \right|$  наибольшее